

Тема: Логарифмы и их свойства. Десятичные и натуральные логарифмы.

Логарифм числа

Остановимся на решении двух показательных уравнений.

Решение уравнения

$$2^x = 32$$

не вызывает труда. Так как $32 =$

$$2^5$$

, то данное уравнение примет вид

$$2^x = 2^5$$

. Поэтому уравнение имеет единственное решение $x = 5$.

А теперь рассмотрим уравнение

$$2^x = 5$$

. Обдумывая, ситуацию с таким показательным уравнением математики ввели новый символ – логарифм. С помощью этого символа корень уравнения

$$2^x = 5$$

записали так:

$$x = \log_2 5$$

(читается: логарифм числа 5 по основанию 2).

В общем виде:

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

,

$$x = \log_a b$$

.

Определение. *Логарифмом положительного числа b по основанию a (*

$$a > 0, a \neq 1$$

) называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b .

Например:

а) $\log_3 81 = 4$, т.к. $3^4 = 81$;

б) $\log_5 125 = 3$, т.к. $5^3 = 125$;

в) $\log_2 16 = \dots$, т.к. $2^{\dots} = 16$;

г) $\log_6 36 = \dots$, т.к. $6^{\dots} = 36$.

Основное логарифмическое тождество

Если корень

$$x = \log_a b$$

подставить в уравнение

$$a^x = b$$

, то получим формулу

$$a^{\log_a b} = b$$

($b > 0, a > 0$ и $a \neq 1$), которая называется *основным логарифмическим тождеством*.

Это равенство является краткой символической записью определения логарифмов.

Операцию нахождения логарифма числа называют ЛОГАРИФИМОВАНИЕМ.

- Решить примеры согласно тождеству:

$$2^{\log_2 3} = \quad , 5^{\log_5 0,7} = \quad , 10^{\log_{10} 9} =$$

Сравните.

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$0,3^4 = 0,0081$	$\log_{0,3} 0,0081 = 4$

Основные свойства логарифмов

Основные свойства логарифмов вытекают из определения логарифма и свойств показательной функции. При любом $a > 0$, $a \neq 1$ и любых положительных x и y выполнены равенства:

$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_3 3 = 1$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	$\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12}(2 \cdot 72) = \log_{12} 144 = 2$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = 4$
$\log_a x^p = p \log_a x$ для любого действительного p	$\log_4 4^5 = 5 \cdot \log_4 4 = 5 \cdot 1 = 5$
$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$, для любого действит-го $m \neq 0$	$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 125 = \frac{1}{2} \cdot \log_5 125 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

Десятичные и натуральные логарифмы

На практике рассматриваются логарифмы по различным основаниям, в частности по основанию 10.

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называют **десятичным логарифмом числа b** и обозначают $\lg b$, т.е. вместо

$\log_{10} b$
пишут $\lg b$.

Например,

$$\log_{10} 15 = \lg 15, \log_{10} \frac{2}{3} = \lg \frac{2}{3}$$

Натуральным логарифмом (обозначается $\ln$) называется логарифм по основанию e :

$$\ln x = \log_e x$$

Примеры вычисления десятичных логарифмов

1. $\lg 1 = 0$, т.к. $1 = 10^0$
2. $\lg 10 = 1$, т.к. $10 = 10^1$
3. $\lg 100 = 2$, т.к. $100 = 10^2$
4. $\lg 0,1 = -1$, т.к. $0,1 = 10^{-1}$
5. $\lg 0,01 = -2$, т.к. $0,01 = 10^{-2}$